

Сапсалева А.В., Касаткина Е.Г., Алгазин Е.И.
СПОСОБ КОМПЬЮТЕРНОГО АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Sa@koe.ref.nstu.ru

Новосибирский государственный технический университет (НГТУ)
г. Новосибирск

Предложен способ анализа нелинейных задач электротехники методом переменных состояния. Для аппроксимации вольтамперных характеристик нелинейных элементов используются кубические сплайны из библиотеки встроенных функций программы Mathcad. Данный способ позволяет анализировать линейные и нелинейные электрические цепи как при постоянных, так и при синусоидальных входных воздействиях.

Постановка задачи

На примере приведенной схемы необходимо, используя метод переменных состояния, а также аппроксимацию вольтамперной характеристики нелинейного элемента, заданной таблично, произвести расчеты токов и напряжений цепи.

Решение поставленной задачи

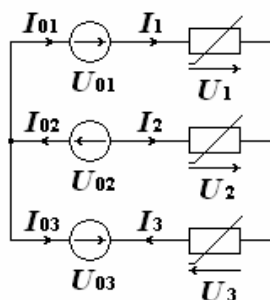


Рис.1. Схема электрической цепи

Решение проследим на примере вычисления значений токов и напряжений резисторов электрической схемы (рис.1), определенных своими центрально-симметричными вольт-амперными характеристиками $I_i(U_i)$, (табл. 1 – 3), если $U_{01} = 10\text{В}$, $U_{02} = 10\text{В}$, $U_{03} = 40\text{В}$. Отметим, что в таблицах приведены значения координат нескольких точек графиков ВАХ лишь для первых квадрантов плоскостей $I_i, U_i \geq 0$, где $i = 1, 2, 3$.

ВАХ резистора 1 Таблица 1

$U_1, \text{В}$	0	3	10	20	40	50
$I_1, \text{А}$	0	0.10	0.20	0.25	0.30	0.31

ВАХ резистора 2 Таблица 2

$U_2, \text{В}$	0	3.5	10	16
$I_2, \text{А}$	0	0.10	0.18	0.20

ВАХ резистора 3 Таблица 3

$U_3, \text{В}$	0	3.5	10	16	20	30	35	40	50
$I_3, \text{А}$	0	0.10	0.18	0.20	0.20	0.20	0.21	0.23	0.40

Решение.

Запишем в рабочий документ *Mathcad* числовые значения параметров источников напряжения: $U_{01} := 10\text{В}$ $U_{02} := 10\text{В}$ $U_{03} := 40\text{В}$

Далее получим аналитические выражения вольтамперных характеристик нелинейных резисторов $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$, $I_3(U_3)$. Аппроксимируем эти наборы точек графиков ВАХ кубическими сплайнами с помощью встроенной в *Mathcad* функции $\text{interp}(s, X, Y, t)$.

Внимание! Поскольку знаки значений напряжений и токов резисторов заранее неизвестны, то определим выражения их ВАХ $I_i(U_i)$ в *первом* и *третьем* квадрантах плоскостей I_i , U_i , ($i = 1, 2, 3$). Переопределим значение встроенной переменной ORIGIN, положив его равным 1.

Начнем с аппроксимации (интерполяции) ВАХ первого резистора (табл. 1).

1. Создадим вспомогательную матрицу Z ($\dim Z = 6 \times 2$), столбцами которой являются соответствующие строки таблицы:

$$Z := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & 20 & 40 & 50 \\ 0 & 0.10 & 0.20 & 0.25 & 0.30 & 0.31 \end{pmatrix}^T$$

2. Определим далее векторы значений аргумента X и функции Y :

$$X := Z^{(1)} \quad Y := Z^{(2)}$$

3. Определим выражение ВАХ первого нелинейного резистора $I_1(U_1)$:

$$I_1(U_1) := \begin{cases} -\text{interp}(\text{cspline}(X, Y), X, Y, -U_1) & \text{if } U_1 < 0 \\ \text{interp}(\text{cspline}(X, Y), X, Y, U_1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Аппроксимируем (интерполируем) теперь ВАХ второго резистора (табл. 2).

1. Создадим вспомогательную матрицу Z ($\dim Z = 4 \times 2$), столбцами которой являются соответствующие строки таблицы:

$$Z := \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 0.01 & 0.10 & 0.40 \end{pmatrix}^T$$

2. Определим далее векторы значений аргумента X и функции Y :

$$X := Z^{(1)} \quad Y := Z^{(2)}$$

3. Определим выражение ВАХ второго нелинейного резистора $I_2(U_2)$:

$$I_2(U_2) := \begin{cases} -\text{interp}(\text{cspline}(X, Y), X, Y, -U_2) & \text{if } U_2 < 0 \\ \text{interp}(\text{cspline}(X, Y), X, Y, U_2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

И, наконец, аппроксимируем (интерполируем) ВАХ третьего резистора (табл. 3).

1. Создадим вспомогательную матрицу Z ($\dim Z = 9 \times 2$), столбцами которой являются соответствующие строки таблицы:

$$Z := \begin{pmatrix} 0 & 3.5 & 10 & 16 & 20 & 30 & 35 & 40 & 50 \\ 0 & 0.10 & 0.18 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.21 & 0.23 & 0.10 \end{pmatrix}^T$$

2. Определим далее векторы значений аргумента X и функции Y :

$$X := Z^{(1)} \quad Y := Z^{(2)}$$

3. Определим выражение ВАХ третьего нелинейного резистора $I_3(U_3)$:

$$I_3(U_3) := \begin{cases} -\text{interp}(\text{cspline}(X,Y), X, Y, -U_3) & \text{if } U_3 < 0 \\ \text{interp}(\text{cspline}(X,Y), X, Y, U_3) & \text{otherwise} \end{cases}$$

На этом подготовка исходных данных задачи закончена.

Полученные выражения ВАХ резисторов цепи в виде $I_i(U_i)$ определяют выбор независимых переменных системы уравнений стационарного состояния цепи. Решим поставленную задачу **методом напряжений резисторов цепи**. По законам Кирхгофа составим систему уравнений стационарного состояния цепи со схемой, показанной на рис. 1. В качестве независимых переменных состояния цепи выберем напряжения ее резисторов U_1 , U_2 и U_3 . Запишем уравнения баланса напряжений элементов цепи, например, для верхнего и нижнего внутренних контуров ее схемы:

$$\begin{aligned} U_{01} + U_1 - U_2 + U_{02} &= 0, \\ -U_{02} + U_2 + U_3 - U_{03} &= 0. \end{aligned}$$

Запишем уравнение баланса токов элементов цепи для одного из двух узлов ее схемы, например, для правого узла:

$$-I_1(U_1) - I_2(U_2) + I_3(U_3) = 0.$$

Таким образом, стационарные значения напряжений резисторов исследуемой цепи (рис. 1) определяются нелинейной системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} U_{01} + U_1 - U_2 + U_{02} = 0, \\ -U_{02} + U_2 + U_3 - U_{03} = 0, \\ -I_1(U_1) - I_2(U_2) + I_3(U_3) = 0. \end{cases}$$

Решим ее.

Ниже приведен соответствующий фрагмент численного решения этой системы уравнений в *Mathcade*:

Пусть $U_1 := 10\text{В}$ $U_2 := 10\text{В}$ $U_3 := 10\text{В}$

Given $U_{01} + U_1 - U_2 + U_{02} = 0$

$$-U_{02} + U_2 + U_3 - U_{03} = 0$$

$$-I_1(U_1) - I_2(U_2) + I_3(U_3) = 0,$$

$$U := \text{Find}(U_1, U_2, U_3)$$

$$U^T := (1.761 \quad 21.761 \quad 28.239) \text{В}$$

Результаты этих и последующих вычислений отображены в протоколе с точностью до 10^{-3} .

Отметим, что элементы последней матрицы являются значениями индексной переменной U : U_1 , U_2 , U_3 , индексы которых вводятся не с помощью точки $\langle \cdot \rangle$, а с помощью открывающей прямой скобки $\langle U$.

Внимание! Аргументами всех последующих выражений ВАХ в рабочем документе *Mathcada* являются компоненты индексной переменной (вектора) U .

Вычислим теперь значения зависимых переменных состояния цепи.

Найдем значения токов резисторов, используя выражения их вольтамперных характеристик:

$$I_1(U_1) = 0.065 \text{ A} \quad I_2(U_2) = 0.134 \text{ A} \quad I_3(U_3) = 0.198 \text{ A}$$

Проверить полученные результаты можно одним из двух альтернативных способов.

1-ый способ:

Проверим соблюдение законов Кирхгофа для схемы исследуемой цепи:

$$\begin{aligned} U_{01} + U_1 - U_2 + U_{02} &= 0 \\ -U_{02} + U_2 + U_3 - U_{03} &= 0 \\ -I_1(U_1) - I_2(U_2) + I_3(U_3) &= 0, \end{aligned}$$

2-ой способ:

Проверим соблюдение баланса мощностей активных и пассивных элементов цепи – отдаваемой источниками напряжения цепи $P_{от}$ и потребляемой ее резисторами $P_{пот}$.

Предварительно вычислим значения токов I_{01} , I_{02} , I_{03} источников напряжения:

$$I_{01} := I_1(U_1) \quad I_{02} := I_2(U_2) \quad I_{03} := I_3(U_3)$$

Далее вычислим значение мощности $P_{от}$, отдаваемой всеми источниками напряжения цепи:

$$P_{от} := -U_{01} \cdot I_{01} - U_{02} \cdot I_{02} - U_{03} \cdot I_{03} \quad P_{от} = 8.630 \text{ Вт}$$

Вычислим теперь значение мощности $P_{пот}$, потребляемой всеми резисторами цепи:

$$P_{пот} := U_1 \cdot I_1(U_1) + U_2 \cdot I_2(U_2) + U_3 \cdot I_3(U_3) \quad P_{пот} = 8.630 \text{ Вт}$$

Как видим, значения мощности $P_{от}$, отдаваемой источниками напряжения цепи, и мощности $P_{пот}$, потребляемой ее резисторами, совпадают с точностью до трех значащих цифр после запятой. Задача решена верно.

Выводы

Использование кубических сплайнов для анализа нелинейных задач электротехники дает возможность пользоваться встроенными функциями программы Mathcad, тем самым обогащая инструментарий современных специалистов.

-
1. Очков В.Ф. Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров. – М.: Компьютер-пресс, 1998 г.
 2. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / Под ред. д.т.н., проф. Конкина П.А. – М: Энергоиздат, 1982 г.